تحليل مؤشرات الكفاءة

د. مصطفى بابكر

مؤشرات الكفاءة: تمهيد

لقد اعتمدنا في حساب مؤشرات الإنتاجية في الجزء السابق على الفرضية الضمنية للأرقام القياسية أن جميع المنشآت الإنتاجية تعمل بكفاءة تقنية كاملة. ليستقيم قياسنا لمؤشرات الكفاءة سنلغي هذه الفرضية ونستعيض عن الطرق القياسية المبنية عليها باستخدام طرق البرمجة الرياضية (Mathematical Programming) لتقدير دوال الحدود القصوى للأداء ومن ثم قياس درجة كفاءة المنشآت الإنتاجية مقارنة بهذه الحدود.

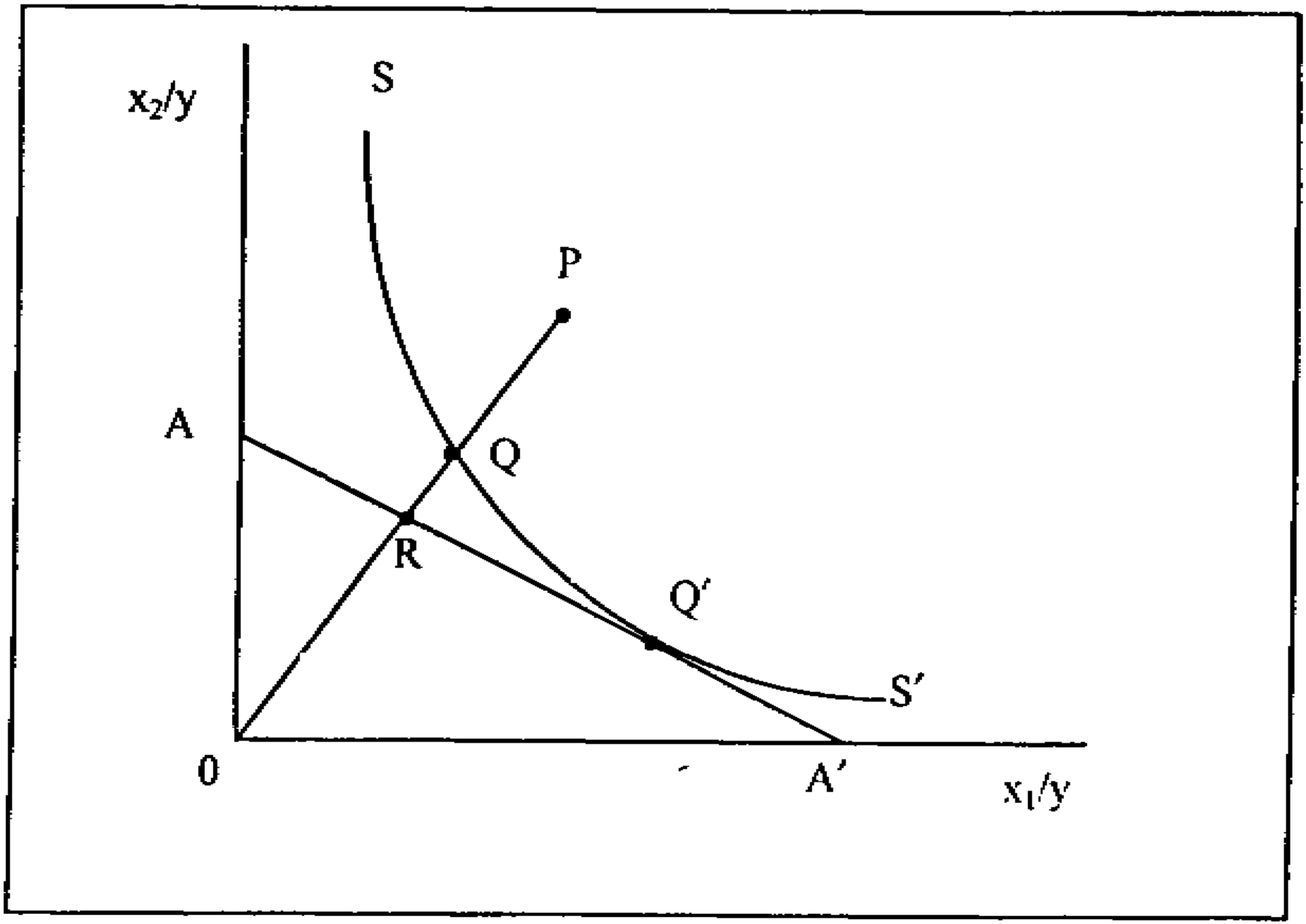
أساسيات قياس الكفاءة

- بيّن فاريل (1957) أن الكفاءة الاقتصادية (Economic Efficiency) للمنشأة تتكون من الكفاءة التقنية (Technical Efficiency) والكفاءة التوظيفية (Allocative Efficiency). الكفاءة التقنية وتعني مقدرة المنشأة على الحصول على أكبر قدر من الإنتاج باستخدام المقادير المتاحة من المدخلات وتعكس الكفاءة التوظيفية مقدرة المنشأة على استخدام المزيج الأمثل للمدخلات آخذة في الاعتبار أسعار المدخلات والتقنيات الإنتاجية المتاحة.

- تبعاً لفاريل هنالك طريقتان لحساب مؤشرات الكفاءة الأولى من جانب المدخلات والثانية من جانب المخرجات. وتسمى الأولى المؤشرات ذات التوجيه الاستخدامي (Input-Oriented Measures) وتسمى الثانية المؤشرات ذات التوجيه الإخراجي (Output-Oriented Measures).

المؤشرات ذات التوجيه الاستخدامى

- يمثل الشكل أدناه الخريطة الإنتاجية من وجهة الاستخدام لمنشأة تنتج المخرج y مستخدمة مدخلي الإنتاج x_1 و x_2 تحت ظروف تقنية تتميز بثبات اقتصاديات الحجم.


x_2/y
S
P
A
Q
R
Q′
S′
0
A′
x_1/y

- حيث ss' تمثل تقنية المدخلات لإنتاج وحدة واحدة من y بأقصى كفاءة و AA' منحنى التكلفة المتساوية لإنتاج الوحدة.
- يمثل المنحنى ss' نقاط الاستخدام ذات الكفاءة الكاملة لإنتاج وحدة من الناتج y . عليه فإن النقطة P تعتبر أقل كفاءة من Q لإنتاج وحدة واحدة من وتعبّر المسافة PQ عن مدى الانخفاض في الكفاءة التقنية حيث تشير إلى الكمية التي يمكن بها تقليص جميع المدخلات تناسبيا بدون تقليص الإنتاج. ويحسب مؤشر الكفاءة التقنية للمنشأة التي تنتج عند النقطة P على الشعاع OP بالقانون:

$$TE_t = \frac{OQ}{OP}$$

- ويأخذ المؤشر القيم 1-0 حيث القيمة 1 تدل على الكفاءة التقنية الكاملة للمنشأة.
- يمثل ميل المستقيم AA' السعر النسبي للمدخلات وبمعرفة هذا الميل يمكن حساب مؤشر الكفاءة التوظيفية للمنشأة على الشعاع OP بالقانون:

$$AE_i = \frac{OR}{OQ}$$

وتمثل المسافة RQ المقدار الذي يمكن به تخفيض تكلفة إنتاج الوحدة من y بتوظيف المدخلات حسب النقطة Q' بدلا عن النقطة Q.

- تعرف الكفاءة الاقتصادية للمنشأة حسب القانون:

$$EE_i = \frac{OR}{OP} = \frac{OQ}{OP} \times \frac{OR}{OQ} = TE_i \times AE_i$$

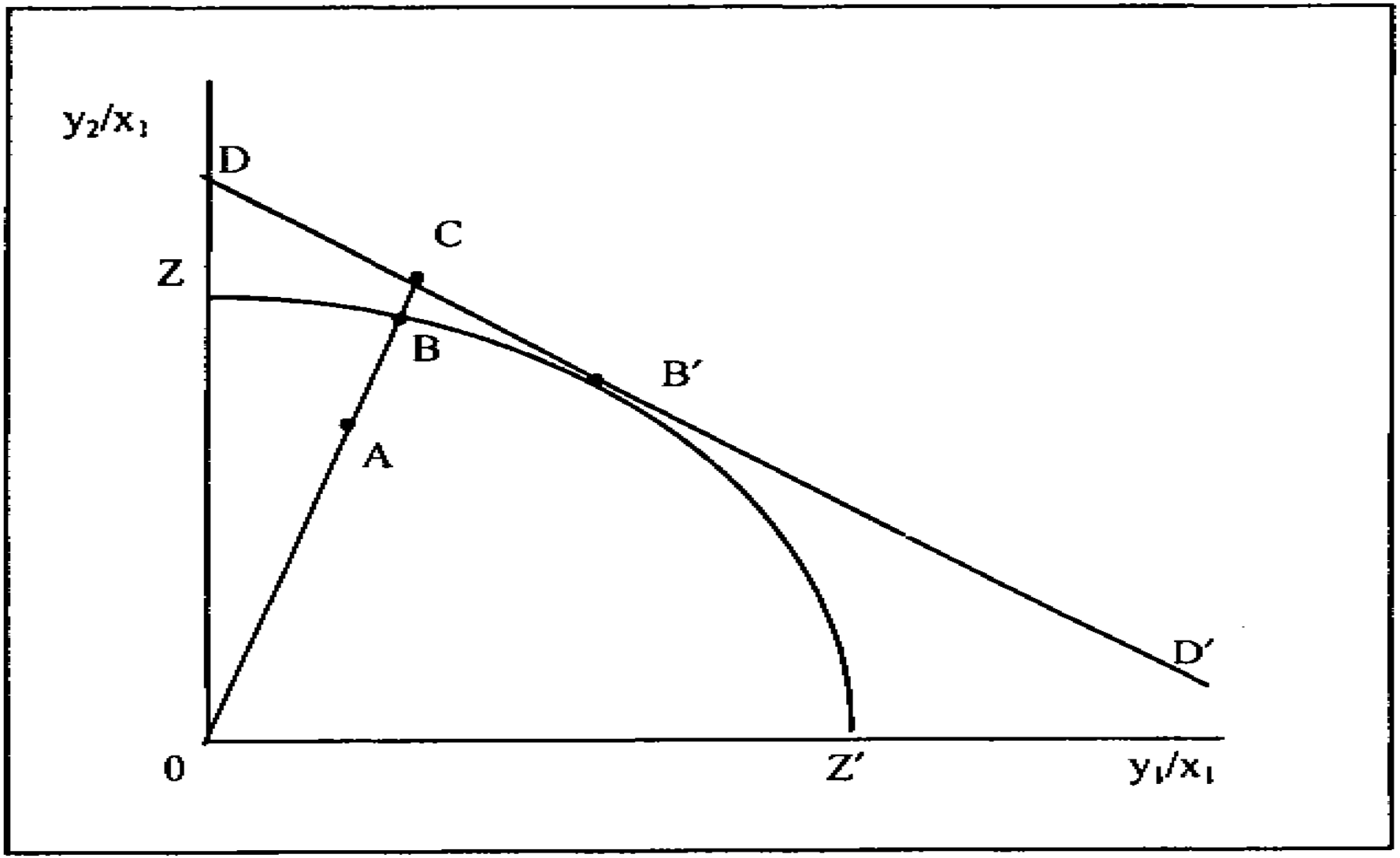
أي أن الكفاءة الاقتصادية تساوي حاصل ضرب الكفاءة التقنية والكفاءة التوظيفية.

- تفترض القوانين السابقة معرفة الباحث بالتقنيات الإنتاجية للمنشآت. في حالة عدم توفر مثل هذه المعرفة اقترح فاريل استخدام الطرق غير المعملية كالتجزئة الخطية لخريطة المدخلات أو الطرق المعملية كتوفيق بيانات الإنتاج والاستخدام لدالة كوب- دوقلاس.

المؤشرات ذات التوجيه الإخراجي

- تعرف الكفاءة مِن جانب المخرجات بالكمية التي يمكن بها زيادة المخرجات تناسبيا بدون تقليص كمية المدخلات.

- يوضح الشكل أدناه الخريطة التقنية للمخرجات لمنشأة تنتج نوعين من المخرجات y_1 و y_2 وتستخدم مدخل الإنتاج x_1 تحت ظروف تقنية تتميز بثبات اقتصاديات الحجم.



حيث ZZ' يمثل منحنى إمكانية الإنتاج و DD' خط تساوي الإيرادات.

- تمثل النقطة A منشأة غير كفؤة لأنه يمكن زيادة إنتاج السلعتين y_1 و y_2 إلى مستوى النقطة B بدون أي زيادة في المدخلات. عليه تحسب الكفاءة التقنية لهذه المنشأة على الشعاع OC بالقانون:

$$TE_O = \frac{OA}{OB}$$

ويأخذ المؤشر القيم 1-0 حيث القيمة 1 تمثل الكفاءة التقنية الكاملة.

- يمثل المستقيم DD' السعر النسبي للمخرجات ويحسِب مؤشر الكفاءة التوظيفية للمنشأة التي تنتج عند النقطة B بدلا عن B' على الشعاع OC بالقانون:

$$AE_O = \frac{OB}{OC}$$

حيث المسافة BC تمثل الزيادة في الإيراداتٍ التي يمكن تحقيقها بتوظيف المخرجات حسب المستوى B' بدلا عن B .

- تعرف الكفاءة الاقتصادية الكاملة للمنشأة حسب القانون:

$$EE_O = \frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OB} \times \frac{OB}{OC} = TE_O \times AE_O$$

- تتساوى قيم مؤشرات الكفاءة من جانبي المدخلات وجانب المخرجات فقط في حالة ثبات اقتصاديات الحجم.

نموذج التحليل بتطويق البيانات

(Data Envelopment Analysis "DEA" Model)

- يستخدم نموذج DEA البرمجة الخطية لإيجاد نقاط التجزئة لمنحنى الحدود القصوى للأداء ومن ثم يقيس درجة الكفاءة مقارنة بهذا المنحنى.

- هنالك نوعان من نماذج الـ DEA هما نموذجي اقتصاديات الحجم الثابتة (CRS) واقتصاديات الحجم المتغيرة (VRS) ولأي من النوعين يمكن حساب مؤشرات الكفاءة إما باستخدام خريطة المدخلات أو خريطة المخرجات.

مؤشرات الكفاءة لنموذج الاقتصاديات الثابتة:

افترض توفر البيانات الإحصائية عن K من المدخلات و M من المخرجات لـ N من المنشآت الإنتاجية. اجعل المتجهة x_1 ترمز للمدخلات والمتجهة y_1 ترمز للمخرجات حيث i ترمز للمنشأة. أيضا اجعل X تمثل مصفوفة المدخلات $K \times N$ واجعل Y تمثل مصفوفة المخرجات $M \times N$

- لإيجاد مؤشر الكفاءة للمنشأة i باستخدام خريطة المدخلات تحل مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$Max_{u,v} u'y_i$$

$$st$$

$$v'x_i = 1$$

$$u'y_i - v'x_i \le 0, \quad j = 1, 2, ..., N$$

$$u \ge 0, v \ge 0$$

حيث المتجهة $(M \times 1)\, u$ تمثل أوزان المخرجات والمتجهة $(K \times 1)\, u$ تمثل أوزان المدخلات والمقدار $u'y_i$ يمثل درجة كفاءة المنشأة i.

- باستخدام نظرية الازدواجية (Duality) في البرمجة الخطية يمكن تبسيط المسألة أعلاه بوضعها في الصورة:

$$Min_{\theta,\lambda}\ \theta$$

$$st$$

$$-y_i + Y\lambda \geq 0$$

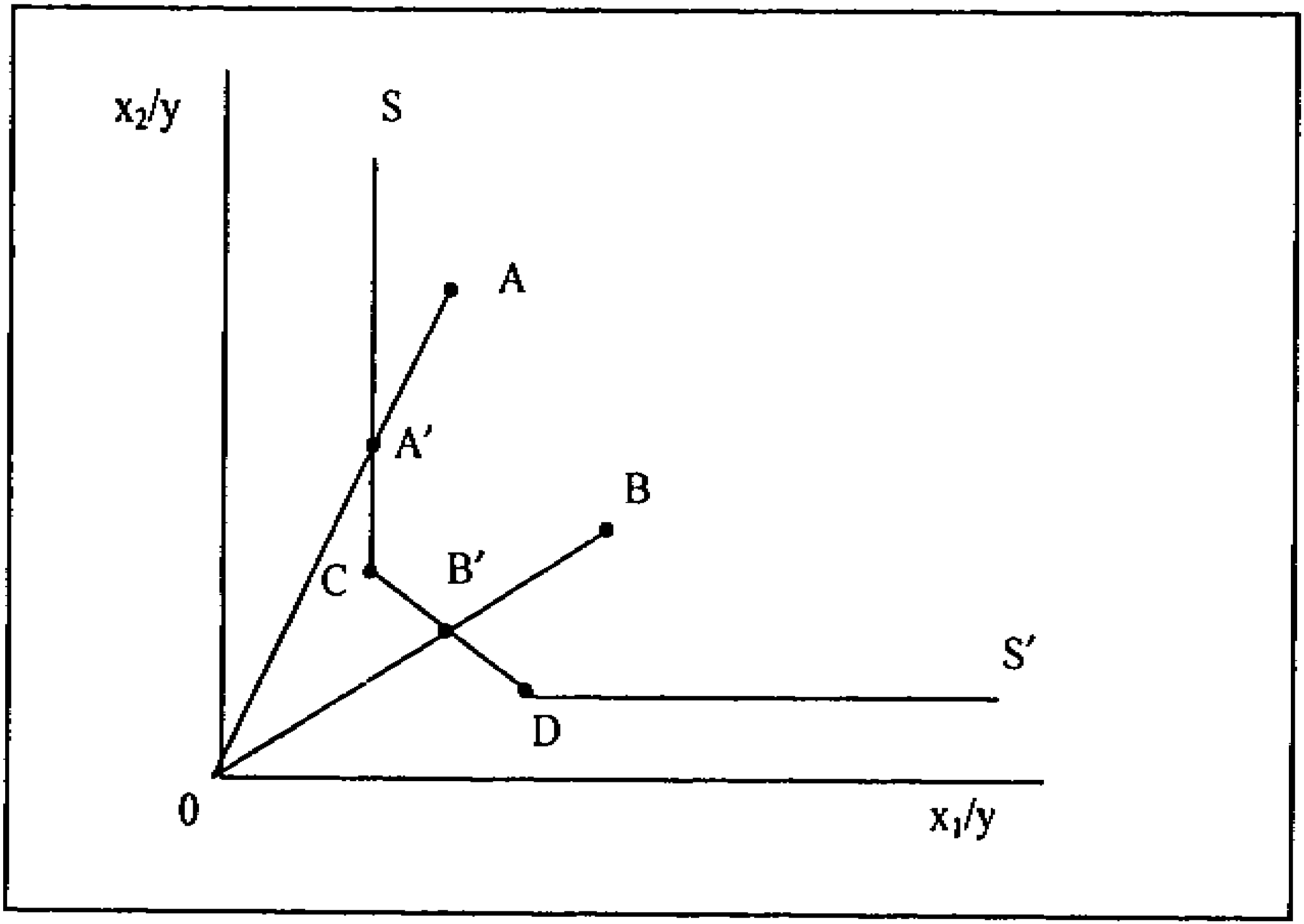
$$\theta x_i - X\lambda \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

حيث المتجهة $\lambda (N \times 1)$ تمثل أوزان المفردات و θ قيمة مؤشر الكفاءة التقنية للمنشأة i . وتأخذ θ القيم 1-0 حيث القيمة 1 تعني وقوع نقطة الأداء على منحنى الحدود القصوى وبالتالي تدل على كفاءة المنشأة من الناحية التقنية.

- وللصورة الأخيرة التفسير التالي: أِن المسألة تسعى إلى تقليص متجهة المدخلات للمنشأة i (x_1) تناسبيا إلى أقل حد ممكن مع الإبقاء على إمكانية تحقيق مستوى المخرجات عند y_1 .

- ويمثل الإطار الداخلي لنقاط التجزئة الخطية لمنحنى السواء الإنتاجي (Isoquant) النقاط البيانية المشاهدة وينتج من التقليص الشعاعي لمتجهة المدخلات x_1 النقاط المسقطة (Projected) $(x\lambda, Y\lambda)$ على المنحنى. ويمثل الشكل أدناه هذه النقاط بيانيا:


x_2/y
S
A
A′
B
B′
C
S′
D
0
x_1/y

حيث:

- ss' يمثل منحنى السواء الإنتاجي.
- تمثل النقطتين C و D أداء منشأتين كفؤتين تقنياً وتحدد هاتين النقطتين الإطار الداخلي للمنحنى ss'.
- تمثل النقطتين A و B أداء منشأتين غير كفؤتين تقنياً وتمثل A' و B' النقاط المقابلة (المسقطة) للنقطتين A و B على المنحنى ss'.

- تحسب الكفاءة للمنشأة B بـ $\frac{OB'}{OB}$ وللنقطة A بـ $\frac{OA'}{OA}$.

- بالرغم من وقوع النقطة A' على المنحنى ss' إلا أنه يمكن تقليص استخدام المدخل x_2 بدون تقليص الناتج y وعليه فهنالك تساؤل عن كفاءة النقاط المسقطة على الأجزاء الأفقية أو الرأسية من المنحنى. السبب في هذا الإشكال يرجع لاستخدام التجزئة الخطية للحصول على المنحنى ss' .
- تعرف الزيادة في استخدام المدخل x_2 في الأدبيات بتباطؤ المدخل (Input Slack) ويمكن حدوث التباطؤ أيضا في المخرجات ويسمى بتباطؤ المخرج (Output Slack). وفي المسألة السابقة يكون تباطؤ المخرج صفرا في حالة $Y\lambda - y_i = 0$ وتباطؤ المدخل يساوي صفرا في حالة $-\theta x_i - X\lambda = 0$.

مثال تطبيقي:

المشاهدات في الجدول ادناه لخمسة منشآت تنتج السلعة y مستخدمة المدخلات x_1 و x_2 :

Firm	y	x_1	x_2	x_1/y	x_2/y
1	1	2	5	2	5
2	2	2	4	1	2
3	3	6	6	2	2
4	1	3	2	3	2
5	2	6	2	3	1

- صياغة معادلات البرمجة الخطية للمنشآت في المثال:

لكل منشأة يحتوي ينموذج البرمجة الخطية على ثلاثة معادلات تحتوي على 6 معاملات غير معروفة هي $\theta, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_5$. مثلاً للمنشأة 3 يتمثل نموذج البرمجة الخطية في:

$$Min_{\theta,\lambda}\theta$$

$$st$$

$$-y_3 + y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 + y_4\lambda_4 + y_5\lambda_5 \geq 0$$

$$\theta x_{13} - x_{11}\lambda_1 - x_{12}\lambda_2 - x_{13}\lambda_3 - x_{14}\lambda_4 - x_{15}\lambda_5 \geq 0$$

$$\theta x_{23} - x_{21}\lambda_1 - x_{22}\lambda_2 - x_{23}\lambda_3 - x_{24}\lambda_4 - x_{25}\lambda_5 \geq 0$$

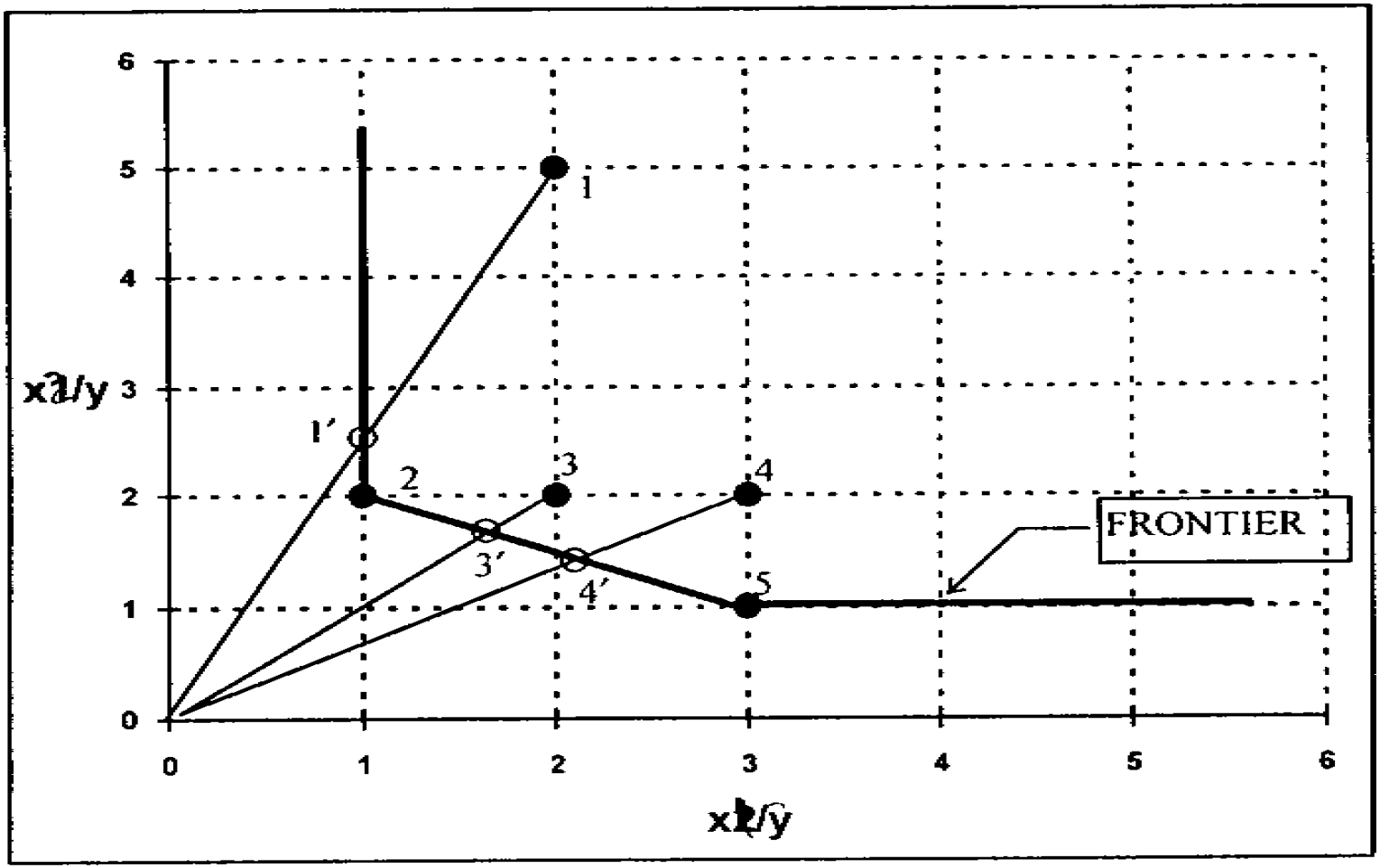
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

- الجدول أدناه يعرض الحل الأمثل للمسألة:

Firm	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	IS_1	IS_2	OS
1	0.5	-	0.5	-	-	-	-	0.5	-
2	1.0	-	1.0	-	-	-	-	-	-
3	0.833	-	1.0	-	-	0.5	-	-	-
4	0.714	-	0.214	-	-	0.286	-	-	-
5	1.0	-	-	-	-	1.0	-	-	-

حيث IS_1 و IS_2 يمثلان درجة تباطؤ المدخلات و OS يمثل درجة تباطؤ المخرج.

- ويمثل حل المسألة بيانياً في الشكل التالي:



* نلاحظ أن الكفاءة التقنية مثلاً للمنشأة 3 تساوي 0.833 وهذا يعني أن المنشأة يمكن أن تقلص استخدامها للمدخلات x_1 و x_2 بنسبة 16.7% بدون تقليص إنتاجها للسلعة y وذلك باستخدام مزيج المدخلات للنقطة $3'$.

* تقع النقطة المقترحة (أو المسقطة) $3'$ بين النقطتين 2 و 5 على منحني الكفاءة المقدر. وتسمى المنشأتين 2 و 5 بالأنداد (Peers) للمنشأة 3 وتعطى قيم λ في السطر المقابل للمنشأة 3 في جدول الحل أوزان الأنداد .

* بالإضافة إلى مصطلح الأنداد تستخدم دراسات الـ DEA أيضاً مصطلح الأهداف (Targets) في تسمية إحداثيات النقطة المقترحة على منحنى الكفاءة. فمثلاً الأهداف للنقطة 3 تمثلها إحداثيات النقطة $3'$ والتي تحسب بتقليص مستوى الاستخدام تبعا لمعدل الكفاءة– أي $(2,2) \times 0.833 = (1.666, 1.666)$ وذلك للوحدة الواحدة من الإنتاج y_3 .

* باتباع نفس الأسلوب في التحليل نجد أن المنشأتين 1 و 4 غير كفؤتين تقنيا حيث معدل الكفاءة للمنشأة 1 يساوي 0.5 وللمنشأة 4 يساوي 0.714 من جدول الحل. وللمنشأة 1 ند واحد هي المنشأة 2 بينما للمنشأة 4 نفس أنداد المنشأة 3 (أي المنشأتين 2 و 5). كذلك نلاحظ أن المدخل x_2 مدخل متباطئ (Slack Input) بالنسبة للمنشأة 1 حيث يمكن تقليص x_2 بمقدار 0.5 عند النقطة المقترحة $1'$ بدون تقليص مقدار المنتج y_1. عليه تكون الأهداف للنقطة 1 هي إحداثيات النقطة 2 بدلاً عن النقطة المقترحة $1'$ ، أي الإحداثيات $(x_1 = 1 \ ، \ x_2 = 2)$.

تمارين وتطبيقات حساب مؤشرات الكفاءة بطريقة DEA على الحاسب الآلي:

- هنالك برامج عديدة يمكن استخدامها في حل نماذج البرمجة الخطية وبالتالي في حساب مؤشرات الكفاءة بطريقة DEA. البرنامج الذي سنستخدمه هنا يسمى DEAP وهو برنامج متخصص في حساب مؤشرات الكفاءة بطريقة DEA.

- يتبع برنامج DEAP نفس هيكل برنامج TFPIP الذي استخدمناه في حساب مؤشرات الإنتاجية. حيث يحتاج المستخدم لتجهيز ملف للبياناٍت وملف للتعليمات. ترتيب المشاهدات في ملف البيانات يطابق تماما ترتيبها في برنامج TFPIP. أما ملف التعليمات فشبيه بملف التعليمات لبرنامج TFPIP ويختلف عنه فقط في خيارات المؤشرات ويتبع الصيغة التالية:

السطر الأول : اسم ملف البيانات.

السطر الثاني : اسم ملف النتائج.

السطر الثالث : عدد المنشآت.

السطر الرابع : عدد النقاط الزمنية.

السطر الخامس : عدد المخرجات.

السطر السادس : عدد المدخلات.

السطر السابع : توجيه المؤشر حيث 0 تعني التوجيه الاستخدامي و 1 تعني التوجيه الإخراجي.

السطر الثامن : اقتصاديات الحجم حيث 0 تعني CRS و 1 تعني VRS .

السطر التاسع : نوعية مؤشر DEA حيث 0 تعني مؤشر الـ DEA (Multi-Stage)، 1 تعني مؤشر DEA متضمنا التكلفة، 2 مؤشر مالمكيست ، 3 مؤشر DEA(1 – Stage) و 4 مؤشر DEA (2 – Stage) .

- تشمل مخرجات البرنامج على ملخص عن الأداء الكلي للمنشآت وأيضاً عن أدائها التفصيلي وتتمثل مفردات الملخص الإجمالي في كفاءة المنشآت، المخرجات والمدخلات المتباطئة، الأنداد وأوزانها والأهداف بالنسبة للمدخلات والمخرجات.

- يشمل التطبيق العملي حل المثال السابق وأمثلة أخرى.

مؤشرات الكفاءة لنموذج اقتصاديات الحجم المتغيرة (VRS):

- تعتبر فرضية CRS ملائمة فقط عندما تكون جميع المنشآت تعمل في مستوى أحجامها المثلى. لكن في الواقع توجد كثير من العوائق تمنع المنشآت من تحقيق هذه الأحجام كالمنافسة غير التامة، قيود التمويل وغيرهما.
- استخدام فرضية CRS في نموذج DEA عندما لا تكون كل المنشآت تعمل في مستوى أحجامها المثلى ينتج عنه خلط مؤشرات الكفاءة التقنية بالكفاءة الحجمية.
- للفصل بين أثر التقنية وأثر الحجم في قياس الكفاءة يستخدم نموذج VRS

- يعدل نموذج CRS إلى نموذج VRS في مسألة البرمجة الخطية للـ DEA بإضافة قيد الحجم $Z'\lambda = 1$ لتصبح المسألة:

$$Min_{\theta,\lambda}\theta$$

$$st$$

$$-y_i + Y\lambda \geq 0$$

$$\theta x_i - X\lambda \geq 0$$

$$Z'\lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

حيث Z $(N \times 1)$ ترمز لمتجهة الوحدة (Unit Vector) .

- تحسب كفاءة الحجم (Scale Efficiency) للمنشأة بتطبيق الـ DEA على نموذج CRS ونموذج VRS للمنشأة ثم حساب معدل الكفاءة التقنية للنموذجين ومن ثم فإن الفرق بين المعدلين يمثل معدل الكفاءة الحجمية *(SE)* .
- أحد عيوب مؤشر الكفاءة الحجمية المحسوب تبعاً للطريقة أعلاه أنه لا يوضح ما إذا كانت المنشأة تعمل في ظل اقتصاديات حجم متزايدة أو متناقصة.

- لمعرفة صفة اقتصاديات الحجم المتغيرة يطبق الـ DEA على نموذج ثالث هو نموذج اقتصاديات الحجم غير المتزايدة (NIRS) بتعديل علامة المساواة في معادلة قيد الحجم إلى علامة≤ ليصبح نموذج البرمجة الخطية:

$$Min_{\theta,\lambda}\theta$$

$$st$$

$$-y_i + Y\lambda \geq 0$$

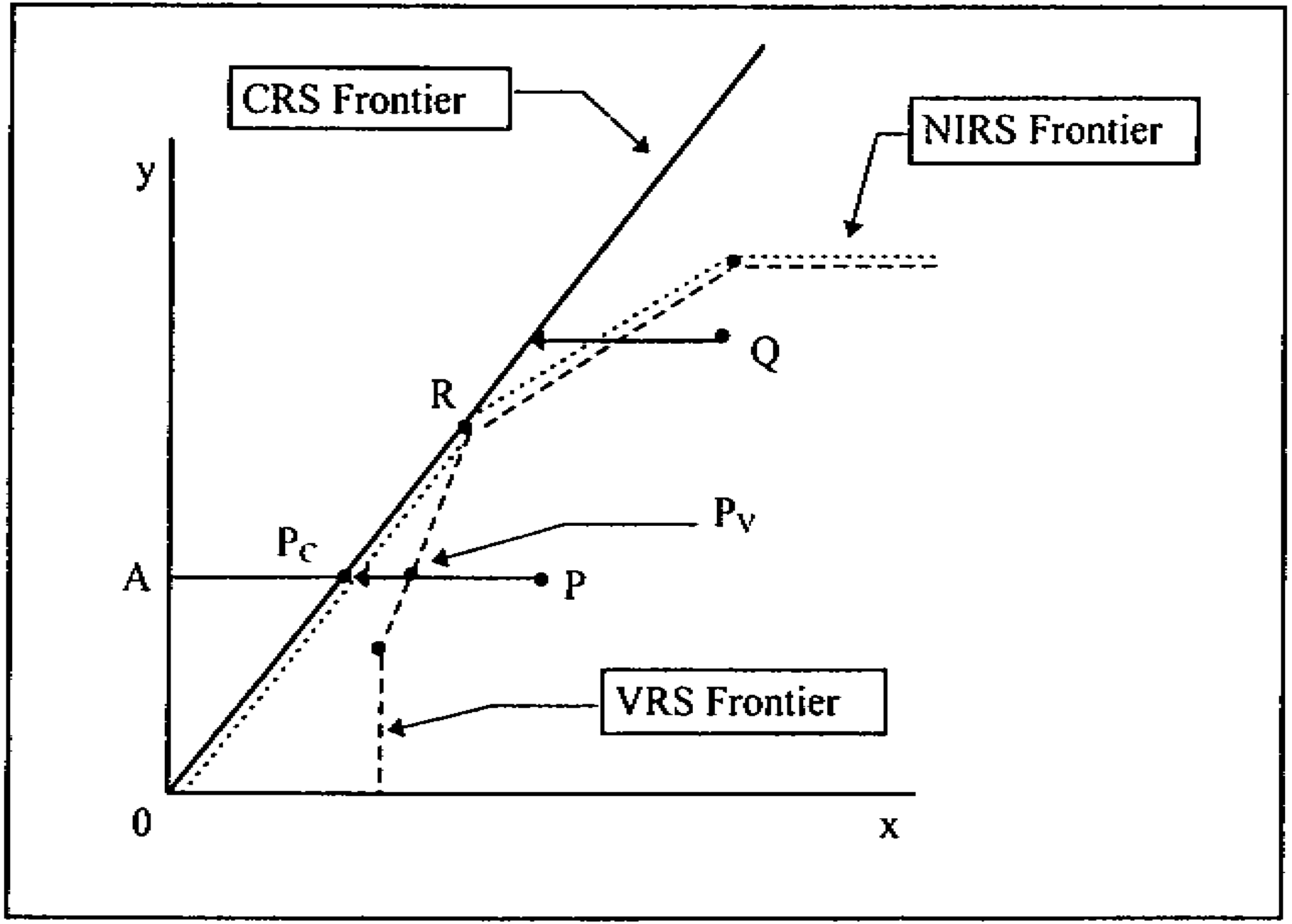
$$\theta x_i - X\lambda \geq 0$$

$$Z'\lambda \leq 1$$

$$\lambda \geq 0$$

ويتم مقارنة معدل الكفاءة التقنية لنموذج NIRS بنموذج VRS فإذا تساوى المعدلان تصف المنشأة بتناقص الحجم وإذا اختلفا تصف المنشأة بتزايد الحجم.

- الشكل أدناه يبين الحدود القصوى للإنتاج للنماذج الثلاثة (NIRS, VRS, CRS) ومواقع عدد من المنشآت بالنسبة لهذه الحدود وذلك لدالة إنتاجية بسيطة تتكون من مخرج واحد *(y)* ومدخل واحد *(x)* .


CRS Frontier
NIRS Frontier
y
Q
R
P_V
P_C
A
P
VRS Frontier
0
x

- في ظل CRS تمثل المسافة PP_c مدى عدم الكفاءة التقنية للنقطة P بينما في ظل VRS تمثل عدم الكفاءة التقنية لذات النقطة بالمسافة PP_v فقط. ويمثل الفرق في المسافة (أي P_cP_v) درجة عدم الكفاءة الحجمية للمنشأة P . رياضيا يعبر عن هذه المؤشرات كالآتي:

$$TE_{CRS} = \frac{AP_c}{AP}$$

$$TE_{VRS} = \frac{AP_v}{AP}$$

$$SE = \frac{AP_c}{AP_v}$$

$$TE_{CRS} = TE_{VRS} \times SE$$

- يتضح أيضاً من مقارنة معدلات الكفاءة التقنية للنماذج CRS، VRS و NIRS أن المنشأة Q تتصف بتناقص اقتصاديات الحجم حيث $TE_{NIRS} = TE_{VRS}$ ، والمنشأة تتصف بثبات اقتصاديات الحجم حيث $TE_{NIRS}=TE_{VRS}=TE_{CRS}$ ، والمنشأة تتصف بتزايد اقتصاديات الحجم حيث $TE_{NIRS} \neq TE_{VRS}$.

- أمثلة وتطبيقات على نموذج VRS و DEAP.

نماذج الـ DEA ذات التوجيه الإخراجي:

- بالمقارنة مع نموذج التوجيه الإستخدامي يعرف نموذج التوجيه الإخراجي معدل الكفاءة التقنية للمنشأة على أنه الزيادة التناسبية في الإنتاج مع ثبات مقادير المدخلات. ويعطى النموذجين نفس القيمة في ظل CRS ولكن يختلفان في ظل VRS.
- يتم الاختيار بين التوجيه الإستخدامي والتوجيه الإخراجي عند قياس معدلات الكفاءة اعتمادا على درجة تحكم إدارة المنشأة في تحديد المدخلات والمخرجات الإنتاجية.
- تشبه نماذج الـ DEA ذات التوجيه الإخراجي لدرجة كبيرة نماذج الـ DEA ذات التوجيه الاستخدامي كما يتضح من النموذج التالي لاقتصاديات الحجم المتغيرة (VRS) ذات التوجيه الإخراجي:

$$Max_{\phi,\lambda}\phi$$

$$st$$

$$-\phi y_i + Y\lambda \geq 0$$

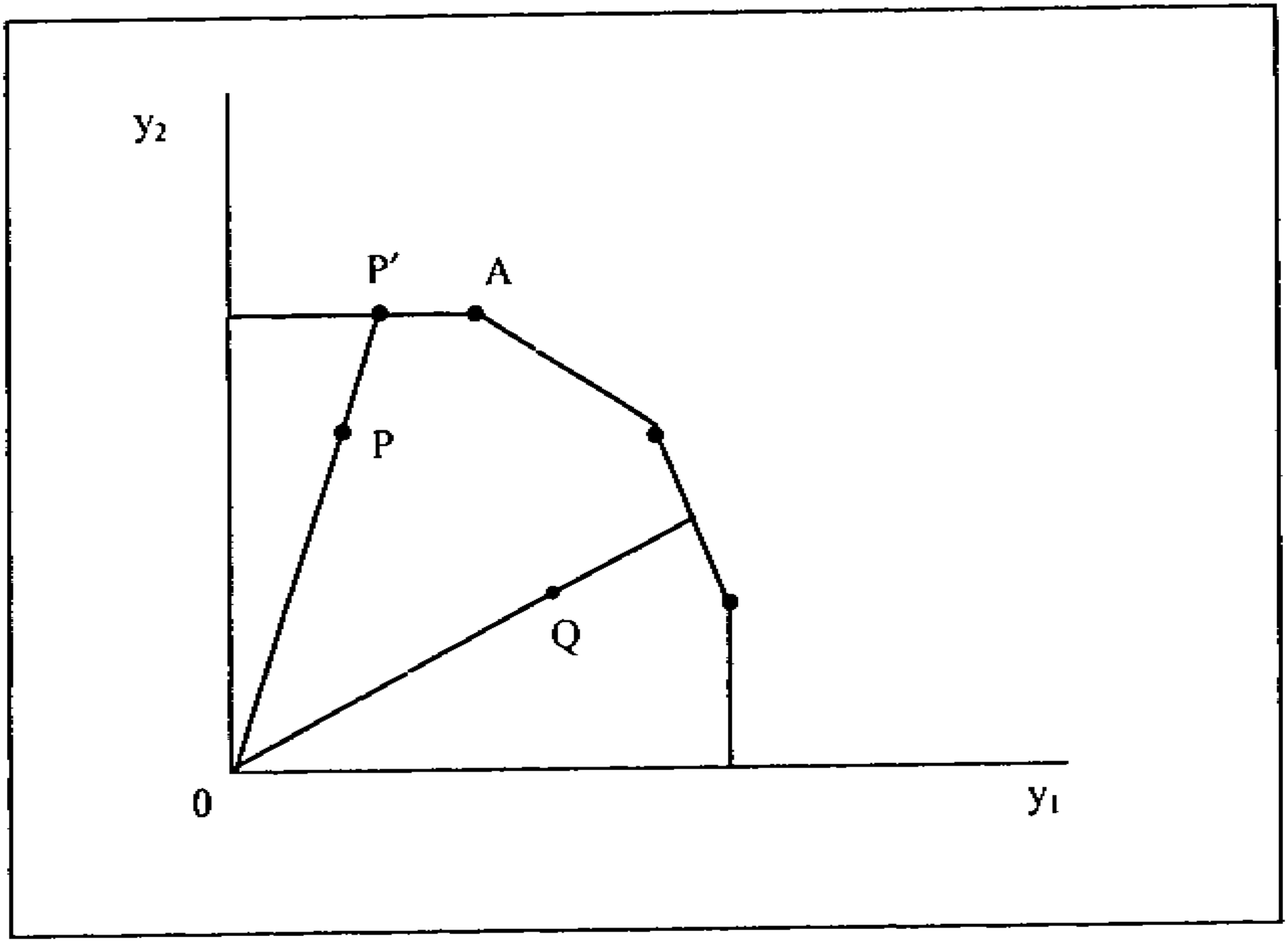
$$x_i - X\lambda \geq 0$$

$$Z'\lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

حيث $1 \leq \phi < \infty$ و $\phi - 1$ تمثل الزيادة التناسبية في المخرجات التي يمكن للمنشأة i تحقيقها بدون زيادة كمياتٍ المدخلات. ويمثل $\frac{1}{\phi}$ معدل الكفاءة التقنية (TE) للمنشأة وهو أيضا المؤشر الذي يحسبه برنامج DEAP لتقييم الكفاءة من جانب المخرجات.

- يوضح الشكل أدناه الإطار التقني لـ DEA ومفهوم الكفاءة من الجانب الإخراجي للمنشأة، حيث يمثل الإطار الخارجي التجزئة الخطية لمنحنى إمكانية الإنتاج.


y2
P′
A
P
Q
0
y1

- نلاحظ أن النقطتين P و Q غير كفؤتين تقنياً بينما النقطة A كفؤة تقنياً . كذلك نلاحظ بالرغم من أن النقطة المقترحة P' تقع على منحنى الكفاءة التقنية إلا أنه يمكن زيادة إنتاج السلعة y_1 بالمقدار AP' بدون زيادة استخدام المدخلات لذلك فالمخرج y_1 مخرج متباطئ (Slack Output) .

- بما أن نماذج التوجيه الاستخدامي ونماذج التوجيه الإخراجي تعملان في تقدير نفس الحدود التقنية نجد أنه لا خلاف بين الاثنين في تحديد المنشآت ذات الكفاءة الكاملة ولكن يكمن الاختلاف بين الطريقتين في حساب مؤشر الكفاءة للمنشأة غير الكفؤة تقنياً وذلك في حالة عدم ثبات اقتصاديات الحجم.
- تمارين وأمثلة على حساب مؤشرات الكفاءة ذات التوجيه الإخراجي باستخدام برنامج DEAP.

البيانات السعرية والكفاءة التوظيفية:

- في ظل توفر المعلومات عن الأسعار وملائمة فرضيات تقليل التكلفة (Cost Minimization) ، تعظيم الإيراد (Maximization Revenue) أو تعظيم الربح (Profit Maximization) لوصف السلوك الاقتصادي للمنشآت الإنتاجية يمكن بالإضافة إلى الكفاءة التقنية حساب الكفاءة التوظيفية لهذه المنشآت. ولتحقيق ذلك يطبق نموذج الـ DEA مرتين: مرة لقياس الكفاءة التقنية والأخرى لقياس الكفاءة الاقتصادية للمنشأة ومن ثم تحسب الكفاءة التوظيفية بأخذ الفرق.

تقليل التكلفة (Cost Minimization):

- في ظل فرضية تقليل التكلفة مع وجود اقتصاديات الحجم المتغيرة (VRS) يعرف نموذج الـ DEA ذو التوجيه الاستخدامي بالمعادلات:

$$Min_{\lambda, x_i^*} w_i' x_i^*$$

$$st$$

$$-y_i + Y\lambda \geq 0$$

$$x_i^* - x\lambda \geq 0$$

$$Z'\lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

حيث w_i متجهة أسعار المدخلات للمنشأة i و x_i^* متجهة الكميات المثلى للمدخلات للمنشأة i . وتحسب الكفاءة الكلية للتكلفة أو الكفاءة الاقتصادية (EE) بالقانون:

$$EE = \frac{w_i' x_i^*}{w_i' x_i}$$

أي أن الكفاءة الاقتصادية تساوي نسبة أقل تكلفة ممكنة للتكلفة الفعلية للمنشأة.

- لحساب الكفاءة التوظيفية يطبق نموذج DEA بدون فرضية سلوك تقليل التكلفة لحساب الكفاءة التقنية (TE) ومن ثم تحسب الكفاءة التوظيفية تبعا للقانون:

تعظيم الإيرادات:

- إذا كان تعظيم الإيراد أكثر ملائمة لوصف السلوك الاقتصادي للمنشأة يمكن حساب الكفاءة التوظيفية في اختيار مزيج المخرجات بطريقة مشابهة للطريقة التي استخدمناها في فرضية تقليل التكلفة. في حالة اقتصاديات الحجم المتغيرة (VRS) أولاً يطبق نموذج DEA ذو التوجيه الإخراجي ومن ثم يحسب مؤشر الكفاءة التقنية(TE) . ثانيا في ظل فرضية تعظيم الإيراد يطبق نموذج DEA ذو التوجيه الإخراجي لحل المسألة:

$$Max_{\lambda, y_i^*} P_i' y_i^*$$

$$st$$

$$-y_i^* + Y\lambda \geq 0$$

$$x_i - x\lambda \geq 0$$

$$Z'\lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

حيث P_i متجهة أسعار المخرجات للمنشأة i و y_i^* متجهة الكميات المثلى للمخرجات للمنشأة i .

- بعد حل النموذج تحسب كفاءة الإيرادات أو الكفاءة الاقتصادية:

$$EE = \frac{P_i' y_i}{P_i' y_i^*}$$

أي أن الكفاءة الاقتصادية تساوي نسبة الإيراد الفعلي لأعظم إيراد ممكن أن تحققه المنشأة.

- ثالثاً يحسب مؤشر الكفاءة التوظيفية تبعاً للقانون:

$$AE = \frac{EE}{TE}$$

- تمارين وتطبيقات على حساب الكفاءة التوظيفية باستخدام برنامج DEAP.

معاملة المتغيرات الخارجية في نموذج DEA:

- هنالك العديد من العوامل والمؤثرات الخارجية التي تؤثر على كفاءة أداء المنشأة والتي لا تستطيع إدارة المنشأة التحكم فيها كالملكية (قطاع خاص/عام، محدودة/ غير محدودة)، الموقع، النقابات العمالية وسياسات الحكومة.
- استخدم اقتصاديو الكفاءة العديد من الطرق لمعالجة هذه العوامل الخارجية أهما الطريقة ذات المرحلتين (Two-Stage). حيث المرحلة الأولى تشمل على تطبيق نموذج DEA لتقدير معدلات الكفاءة للمنشآت بدون أي اعتبار للعوامل الخارجية. أما المرحلة الثانية فتتمثل في إجراء نموذج انحدار يشتمل على العوامل الخارجية كمتغيرات مستقلة ومعدلات الكفاءة كمتغير تابع. ثم تستخدم معاملات الانحدار في تصحيح معدلات الكفاءة لأثر العوامل الخارجية.

معاملة المتغيرات المتباطئة (Slack Variables):

- تكمن المشكلة الفنية للمتغيرات المتباطئة في مسائل البرمجة الخطية في تحديدها وطرق الكشف عنها حيث أن الحل البسيط لهذه المشاكل قد لا يكفي لتحديد كل المتغيرات المتباطئة.
- هنالك العديد من الطرق المستخدمة في معالجة المتغيرات المتباطئة في حساب مؤشرات الكفاءة وتعتمد معظمها على حل أكثر من مسألة برمجة خطية واحدة.
- يتيح برنامج DEAP للمستخدم ثلاثة طرق لمعالجة المتغيرات المتباطئة:

1. معالجة المرحلة الواحدة (One-Stage DEA) والتي فيها يحل البرنامج المسألة الأصلية للبرمجة الخطية ويحسب قيم المتباطئات كبواقي.
2. معالجة المرحلتين (Two-Stage DEA) والتي فيها يحل البرنامج المسألة الأصلية في المرحلة الأولى ويحسب معدلات الكفاءة ثم يحل في المرحلة الثانية مسألة تهدف إلى تعظيم مجموع قيم المتباطئات آخذةً في الاعتبار معدلات الكفاءة من المرحلة الأولى.
3. المعالجة متعددة المراحل (Multi-Stage DEA) وتعتبر تعميماً لمعالجة المرحلتين وفيها يقوم البرنامج بحل سلسلة من مسائل البرمجة الخطية المتتابعة.

- تمارين وتطبيقات على معالجة المتغيرات الخارجية والمتباطئة في نموذج DEA باستخدام برنامج DEAP.

- تطبيق مؤشرات الكفاءة على حالة دراسية باستخدام برنامج DEAP.